PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRÍA SIMPLE EN ESTÁTICA, UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL: NIVEL AVANZADO.

Problema 5

Calcular el campo eléctrico producido por una esfera de radio R que contiene una densidad de carga $\rho_V(r) = \rho_0 \left(r / R \right)$ C/m³, recubierta por una concha esférica de radio $2R$ con densidad superficial de carga constante $\eta = \eta_0$ C/m².

Solución.

Como el sistema de cargas tiene simetría esférica, el campo eléctrico es de la forma $\overline{E}(r) = \overline{1r} E_r(r)$.

Para determinar el campo eléctrico, se aplica la Ley de Gauss en forma integral para el campo eléctrico, tomando como volumen una esfera cuyo radio está dentro de la región donde se desea calcular el campo.

CAMPO ELÉCTRICO EN EL INTERIOR DE LA ESFERA DE RADIO R.

La Ley de Gauss establece:

$$\oint_{S=\partial V} \varepsilon_0 \, \overline{E}(\bar{r}) \cdot \overline{da} = Q_V$$

El lado izquierdo queda (ver problema 1):

$$\oint_{S=\partial V} \varepsilon_0 \, \overline{E}(\bar{r}) \cdot \overline{da} = 4\pi \, \varepsilon_0 \, r^2 \, E_r(r)$$

La carga encerrada para esta región es:

$$Q_V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho_0 \left(r / R\right) r^2 \operatorname{sen}\theta \; dr \, d\theta \; d\varphi = \frac{\pi \, \rho_0}{R} r^4$$

Sustituyendo ambas expresiones en la Ley de Gauss y despejando el campo eléctrico, se tiene:

$$E_r(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0 R} r^2$$

CAMPO ELÉCTRICO EN EL ESPACIO ENTRE LAS DOS ESFERAS.

De nuevo se tiene:

$$\oint_{S=\partial V} \varepsilon_0 \, \bar{E}(\bar{r}) \cdot \overline{da} = 4\pi \, \varepsilon_0 \, r^2 \, E_r(r)$$

El cálculo de la carga encerrada es ahora:

$$Q_V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0 \left(r / R\right) r^2 \operatorname{sen}\theta \; dr \, d\theta \; d\varphi = \pi \; \rho_0 \; R^3$$

Por lo tanto, el campo eléctrico resulta ser:

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 \, R^3}{4\varepsilon_0 \, r^2}$$

CAMPO ELÉCTRICO EN EL EXTERIOR DE LA ESFERA DE RADIO $2R$.

De nuevo se tiene:

$$\oint_{S=\partial V} \varepsilon_0\, \bar{E}(\bar{r}) \cdot \overline{da} = 4\pi\, \varepsilon_0\, r^2\, E_r(r)$$

El cálculo de la carga encerrada es ahora:

$$Q_V = \pi\, \rho_0\, R^3 + \left.\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \eta_0\, da_r \right|_{r=2R} = \pi\, \rho_0\, R^3 + 16\pi\, \eta_0\, R^2$$

Por lo tanto, el campo eléctrico resulta ser:

$$E_r(r) = \frac{\rho_0\, R^3 + 4\eta_0\, R^2}{4\varepsilon_0\, r^2}$$

En resumen, el campo eléctrico producido por este sistema de cargas es:

$$\bar{E}(r) = \begin{cases} \bar{1}r \dfrac{\rho_0}{4\varepsilon_0 R} r^2, \text{si } r \le R, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi \\ \bar{1}r \dfrac{\rho_0\, R^3}{4\varepsilon_0\, r^2}, \text{si } R \le r < 2R, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi \\ \bar{1}r \dfrac{\rho_0\, R^3 + 4\eta_0\, R^2}{4\varepsilon_0\, r^2}, \text{si } r > 2R, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$